***جامعة بنـها***

***كلية العلوم*** **المستوي الأول . الفصل الدراسي الثاني – العام الجامعي 2012/ 2013**

**رياضيات عامة (1) (100 ر) إجـــــــــــــــــابة الأحد 2013/6/9**

---

**السؤال الأول:**

أ- أثبت صحة العلاقة التالية بطريقة الاستنتاج الرياضي

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

الحـــــــــل:

1- في حالة $n=1$ نجد أن

الطرف الأيمن $=\frac{1}{6}(2)(3)=1$

الطرف الأيسر أذن الطرفان متساويان $=1^2=1$

والعلاقة صحيحة عندما $n=1$

2- نفرض صحة العلاقة عندما $n=k$ أي أن

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

3- أثبت صحة العلاقة عندما $n=k+1$ وذلك باستخدام العلاقة (1) بإضافة $(k+1)^2$ لكل من طرفيها نجد أن

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

$$=(k+1)\left(\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\big(k(2k+1)+6(k+1)\big)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\left(k+2)(2k+3\right)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\left(k+2)(2(k+1)+1\right)$$

وهذا يساوي الطرف الأيمن من العلاقة المطلوب أثبات صحتها عندما نضع $n=k+1$ 0 أذن الطرفان متساويان عندما $n=k+1$ وبالتالي تكون العلاقة صحيحة لكل قيم $n$

**ب-** أوجد الكسور الجزئية لكل من :

$$(a)\frac{x+3}{(x+1)(x-1)(x-2)} \qquad (b)\frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

**<u>الحـــل :</u>**

$$(a)\frac{x+3}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

درجة البسط اقل من درجة المقام ، والمقام عبارة عن حاصل ضرب عوامل أولية 0 وبالتالي نفرض مباشرة صورة الكسور الجزئية :

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$$

لإيجاد $A$ يمكن أن نضرب كلا من الطرفين في $x+1$

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}=A+\frac{B(x+1)}{x-1}+\frac{C(x+1)}{x-2}$$

ثم نضع $x=-1$ فنحصل على $A=1/3$ وبالتالي فإن قيمة $A$ تنتج من وضع $x+1=0$ ( أي $x=-1$ ) في الكسر الأصلي بعد حذف ( تغطية ) المقدار $x+1$ ويعبر عن هذه العملية كما يلي :

$$A=\left.\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}\right|_{x=-1}=\frac{1}{3}$$

وبالمثل لإيجاد $B$ نضرب كلا من الطرفين في $x-1$ ثم نضع $x=1$ أي أن

$$B=\left.\frac{x+3}{(x+1)(x-2)}\right|_{x=1}=\frac{4}{-2}=-2$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد الثابت $C$

$$C=\left.\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\right|_{x=2}=\frac{5}{3}$$

فيكون الناتج على الصورة :

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{x-1}+\frac{5}{3(x-2)}$$

$$(b)\ \frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

درجة البسط أقل من درجة المقام ولكن المقام يجب تحليله فنحصل على :

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

وتكون الكسور الجزئية على الصورة

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

وكلا من الثابتين يمكن إيجاده بالتغطية كما يلي :

$$A=\left.\frac{x+1}{x-2}\right|_{x=1}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$B=\left.\frac{x+1}{x-1}\right|_{x=2}=\frac{3}{1}=3$$

فيكون الكسر الجزئي المطلوب على الصورة

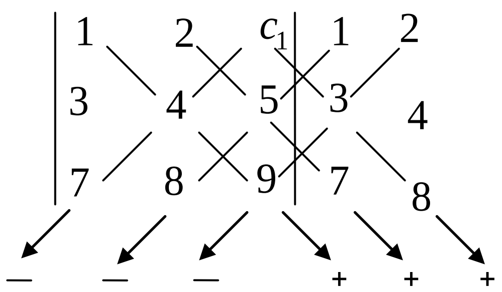
$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$$

**<u>السؤال الثانى:</u>**

أ- أوجد قيمة المحدد التالي بطريقة سارس

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

**<u>الحـــل:</u>**



$$\Delta = (1.4.9 + 2.5.7 + 3.3.8) - (2.3.9 + 1.5.8 + 3.4.7) = 0$$

ب- أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$2x + 3y - z - 4 = 0$$
$$3x + y + 2z - 13 = 0$$
$$x + 2y - 5z + 11 = 0$$

**<u>الحـــل:</u>**

بما أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

إذن للمجموعة حل محدد على الصورة

$$\frac{x}{\Delta_x}=\frac{-y}{\Delta_y}=\frac{z}{\Delta_z}=\frac{-1}{\Delta}$$

حيث

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}3 & -1 & -4\\ 1 & 2 & -13\\ 2 & -5 & 11\end{vmatrix}=-56\,,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & -1 & -4\\ 3 & 2 & -13\\ 1 & -5 & 11\end{vmatrix}=28$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}3 & 3 & -4\\ 1 & 1 & -13\\ 2 & 2 & 11\end{vmatrix}=-84$$

إذن حل المجموعة هو

$$\frac{x}{-56}=\frac{-y}{28}=\frac{z}{-84}=\frac{-1}{28}\Rightarrow\therefore x=2, y=1, z=3$$

**السؤال الثالث:**

**أ-** أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

الحــــــــــــــل:

**أولاً:** نوجد مصفوفة محددات العناصر وهي

$$\begin{bmatrix}0 & 5 & 5\\ 5 & -7 & 8\\ 5 & 3 & -7\end{bmatrix}$$

**ثانياً:** نوجد مدور هذه المصفوفة

$$A_{adj}=\begin{bmatrix}0&5&5\\5&-7&3\\5&8&-7\end{bmatrix}$$

**ثالثا:** نوجد قيمة محددة المصفوفة

$$|A|=25$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{A_{adj}}{|A|}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&-\frac{7}{25}&\frac{3}{25}\\\frac{1}{5}&\frac{8}{25}&-\frac{7}{25}\end{bmatrix}$$

وللتأكد من صحة هذا المعكوس نوجد

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{5}&-\frac{7}{25}&\frac{3}{25}\\\frac{1}{5}&\frac{8}{25}&-\frac{7}{25}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&2\\2&-1&1\\3&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ب- أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

$1)\ y=e^{x^2}$ $\qquad$ $2)\ y=e^{\cos\sqrt{x}}$

$3)\ y=\cos ec2e^{3x}$

<u>**الحـــل :**</u>

$$1) \because y = e^{x^2} \Rightarrow \therefore y' = 2xe^{x^2}$$

$$2) \because y = e^{\cos\sqrt{x}} \Rightarrow \therefore y' = e^{\cos\sqrt{x}} \cdot (-\sin\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) \because y = \cos ec 2e^{3x} \Rightarrow$$

$$\therefore y' = -\cos ec 2e^{3x} \cot 2e^{3x} \cdot (6e^{3x})$$

**السؤال الرابع:**

أ- أختبر الدالة الآتية من حيث النهايات العظمى والصغرى

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

**الحـــل :**

**1-** نوجد المشتقة الأولى

$$y' = x^2 - 4x^2 + 3 = (x-1)(x-3)$$

**2-** نوجد جميع الجذور الحقيقة للمعادلة $y' = 0$ ونجد أنها

$$x_1 = 1 \qquad , \qquad x_2 = 3$$

**3-** نختبر النقط الحرجة

**أولاً :** عندما $x_1 = 1$ نجد أن

$$for \quad x < 1: \qquad y' = (-) \times (-) > 0$$

$$for \quad x > 1: \qquad y' = (+) \times (-) < 0$$

وعلى هذا عند المرور بالقيمة $x_1 = 1$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وهذا يعني أن الدالة لها قيمة عظمى عند النقطة $x_1 = 1$ 0

$$y(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{7}{3}$$

بنفس الطريقة عند النقطة الحرجة $x_2 = 3$ نجد أن

$$for \quad x < 3: \qquad y' = (+) \times (-) < 0$$ --

$$for \quad x > 3: \qquad y' = (+) \times (+) > 0$$

أي أنه عند المرور بالنقطة $x_2 = 3$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وعلى ذلك يكون للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة

$$y(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 3(3) + 1 = 1$$

ب- أحسب قيمة التكاملات الآتية:

$$1)\int x^3 \sin x^4 dx \qquad ,, 2)\int \sqrt{3 + x}\, dx$$

$$3)\int (x^3 - 1)^{11/6}\, x^2 dx$$

**الحــــل: 1-**

باستخدام التعويض $u = x^4 \Leftarrow du = 4x^3 dx$ وبالتعويض في التكامل نجد أن

$$\int x^3 \sin x^4 dx = \frac{1}{4}\int \sin u\, du = -\frac{1}{4}\cos u + c$$

$$= -\frac{1}{4}\cos x^4 + c$$

**الحــــل: 2-**

بوضع

$$u = g(x) = 3 + x \Rightarrow \therefore du = dx$$

بالتعويض في التكامل نحصل على

$$\int \sqrt{3+x}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= \frac{(3+x)^{3/2}}{3/2} + c$$

**الحـــل :3-**

باستخدام التعويض $u = x^3 - 1 \Leftarrow du = 3x^2 dx$ بالتعويض في التكامل نجد أن

$$\int (x^3 - 1)^{11/6}\, x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^{11/6} du = \frac{6}{51} u^{17/6} + c$$

$$= \frac{6(x^3 - 1)^{17/6}}{51} + c$$

*مع أطيب التمنيات*


*د/أحمد عبدالخالق محمدعبدالله – كلية العلوم – قسم الرياضيات*

*ت/1157673982*